Physique Statistique (PHY434)
Maxime Dahan
Année 2016-2017

Petite Classe n° 7
Mardi 23 Mai 2017

Ondes de spin : magnons

On considère une chaîne de N atomes identiques, chacun portant un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \gamma\hbar\vec{S}$ où $\hbar\vec{S}$ est le moment cinétique de spin de chaque atome et γ est le rapport gyromagnétique. L'interaction entre moments est décrite par l'hamiltonien de Heisenberg :

$$H = -J\sum_n \vec{S}_n.\vec{S}_{n+1} \tag{1}$$

Cette interaction, si J est positif, favorise un état ferromagnétique à température nulle. A température T finie, cette configuration est perturbée car les spins s'écartent de leur position d'équilibre à cause de l'agitation thermique. On cherche à décrire, à basse température, l'écart à cette position d'équilibre. On en déduira la chaleur spécifique et l'aimantation de la chaîne à température finie. On traite les opérateurs comme des vecteurs classiques de longueur S.

1 Ondes de spin : magnons

1. Montrer que le couplage d'un spin à ses voisins peut se décrire comme l'action d'un champ magnétique $\vec{B}_n$ agissant sur $\vec{S}_n$.
2. Montrer que l'équation différentielle liant le mouvement du spin S_n à celui de ses voisins s'écrit

$$\frac{d\vec{S}_n}{dt} = \frac{J}{\hbar}\vec{S}_n \wedge (\vec{S}_{n+1} + \vec{S}_{n-1}) \tag{2}$$

   On rappelle pour celà l'équation du moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{C}$$

   où $\vec{C}$ est le couple appliqué. Ici $\vec{C} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.
3. L'équation du mouvement (2) est non linéaire. À partir de maintenant, on se limite à l'étude de petits mouvements autour de l'alignement ferromagnétique, parallèle à l'axe $\vec{u}_z$. On note $\vec{S}_n = S_n^z\vec{u}_z + \delta\vec{S}_n$. Utiliser une notation complexe $\delta S_n = \delta S_n^x + i\delta S_n^y$ pour écrire les équations du mouvement linéarisées.
4. Découpler les équations obtenues en modes propres, appelés *ondes de spin*, solutions de la forme :

$$\delta S_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k S_k \; e^{i(kna-\omega_k t)}$$

   où la pulsation des modes propres s'écrit :

$$\omega_k = \frac{4JS}{\hbar}\sin^2\frac{ka}{2} \tag{3}$$

5. Tracer la relation de dispersion et déterminer le comportement à petit k. Dans la suite, on écrira la relation ainsi obtenue sous la forme :

$$\hbar\omega_k = Ak^2 \tag{4}$$

   Pourquoi peut-on parler de la masse d'une onde de spin ?

6. Montrer que, dans la limite de petits déplacements, l'aimantation totale selon l'axe z s'écrit :

$$\mathcal{M}_z = \gamma\hbar(NS - \frac{1}{2S}\sum_k |S_k|^2) \tag{5}$$

et l'énergie totale :

$$E = -NJS^2 + \frac{1}{2S}\sum_k |S_k|^2\ \hbar\omega_k \tag{6}$$

2 Quantification des ondes de spin

La quantification des ondes de spin s'effectue de la même manière que pour les photons. On considère que l'énergie associée à un mode de fréquence ω_k est transportée par des quasiparticules appelées *magnons* dont l'énergie est $E = \hbar\omega_k$ et dont le facteur d'occupation est donné par la distribution de Bose :

$$n_k = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}} - 1}$$

L'énergie moyenne à température finie s'écrit :

$$E(T) = -NJS^2 + \sum_k n_k \hbar\omega_k \tag{7}$$

1. En comparant les expressions (6) et (7), montrer que l'aimantation peut se réécrire :

$$\mathcal{M}_z = \gamma\hbar(NS - \sum_k n_k) \tag{8}$$

3 Thermodynamique des ondes de spin

Les atomes précédents sont maintenant placés aux N noeuds d'un réseau de dimension trois. On généralise ainsi la description de la chaîne précédente. On suppose que, pour les mouvements de grande longueur d'onde, la relation de dispersion est toujours donnée par la relation (4) où k est le module du vecteur d'onde $\vec{k}$.

1. On veut calculer maintenant énergie interne et aimantation à température finie T. Montrer qu'elles peuvent s'écrire :

$$E(T) = -NJS^2 + \int_0^\infty \hbar\omega\ n(\omega)g(\omega)d\omega$$

   et

$$\Delta\mathcal{M}_z = \gamma N\hbar S - \mathcal{M}_z = \gamma\hbar\int_0^\infty n(\omega)g(\omega)d\omega$$

   où $n(\omega)$ est le facteur de Bose.
2. Calculer la densité d'états $g(\omega)$ des ondes de spins à trois dimensions.
3. Calculer explicitement l'aimantation à basse température. Montrer que la variation relative de l'aimantation vérifie la loi de Bloch :

$$\frac{\Delta\mathcal{M}}{\mathcal{M}_z(0)} = \frac{0.059}{S}\left(\frac{k_B T}{JS}\right)^{3/2} \tag{9}$$

où $\mathcal{M}_z(0) = \gamma N \hbar S$ est l'aimantation à température nulle. On donne :

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{n/2}}{e^x - 1} = \Gamma(\frac{n}{2}+1)\zeta(\frac{n}{2}+1)$$

et $\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \simeq 2.32$. Le réseau est supposé cubique.

4. De la même façon, montrer que la chaleur spécifique totale à basse température varie comme :

$$C = 0.113 N k_B \left(\frac{k_B T}{JS}\right)^{3/2} \tag{10}$$

On donne $\Gamma(5/2)\zeta(5/2) \simeq 1.78$

5. Plus généralement, à d dimensions, montrer que la chaleur spécifique et l'aimantation varient en loi de puissance :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{M}_z(T) &\propto T^\alpha \\ C(T) &\propto T^\alpha \end{aligned}$$

où α est un exposant qui dépend de la dimension de l'espace et que l'on déterminera. Que se passe-t-il si $d \leq 2$?