Physique Statistique (PHY434)
Maxime Dahan
Année 2016-2017

Petite Classe n^o 6
Mardi 16 Mai 2017

Introduction au groupe de renormalisation

1 Décimation pour le modèle Ising 1D

On considère le modèle d'Ising 1D pour N spins en présence d'un champ magnétique. Le hamiltonien s'écrit :

$$\beta H = -K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i$$

1. Ecrire l'expression de la fonction de partition $Z(N, K, h)$ (où N est le nombre de spins).
2. On va effectuer une somme partielle dans la fonction de partition sur les spins d'indice pair. Pour cela, on divise le réseau en un sous-réseau S des sites impairs et un sous-réseau σ des sites pairs.

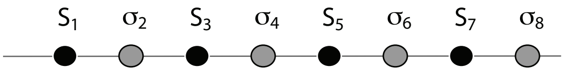

Figure 1 – *Décimation pour un réseau 1D.*

Montrer que Z peut s'écrire :

$$Z = \sum_{[S]} \sum_{\sigma} e^{\sigma_2[(K(S_1+S_3)+h]+\frac{h}{2}(S_1+S_3)} e^{\sigma_4[(K(S_3+S_5)+h]+\frac{h}{2}(S_3+S_5)} \dots$$

3. En déduire que :

$$Z(N, K, h) = \sum_{[S]} \left[e^{(K+h/2)(S_1+S_3)+h} + e^{(-K+h/2)(S_1+S_3)-h} \right] \dots$$

4. On souhaite qu'après la décimation le hamiltonien des $N/2$ spins conserve la même structure à une constante près, c'est à dire que :

$$Z(N, K, h) = e^{Ng(K,h)} Z(N/2, K', h') = e^{Ng} \sum_{[S]} e^{-\beta H'}$$

avec

$$\beta H' = -K' \sum_{i \,\text{impair}} S_i S_{i+2} - h' \sum_{i \,\text{impair}} S_i$$

Montrer que cela entraine les relations :

$$e^{2K+2h} + e^{-2K} = e^{K'+h'+2g} \quad (1)$$
$$e^{2K-2h} + e^{-2K} = e^{K'-h'+2g} \quad (2)$$
$$e^{+h} + e^{-h} = e^{-K'+2g} \quad (3)$$

5. En déduire les relations $K'(K, h)$ et $h'(K, h)$.
6. Analyser les points fixes de la transformation $(K, h) \to (K', h')$.

2 Renormalisation dans l'espace direct : modèle d'Ising sur réseau triangulaire

On s'intéresse maintenant au cas d'un modèle d'Ising 2D en champ nul dans lequel les N spins sont au noeuds d'un réseau triangulaire de pas b. Les spins sont en interaction avec leurs plus proches voisins (Figure 2).

$$\beta H = -K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$$

Afin de transformer progressivement le pas du réseau, on forme des blocs de spins en groupant 3 spins $S_\alpha^{(i)}$ au sommet d'un triangle. Le spin $S_\alpha^{'}$ du bloc est défini par :

$$S_\alpha^{'} = \text{signe}\,(S_\alpha^{(1)} + S_\alpha^{(2)} + S_\alpha^{(3)}) = f(S_\alpha^{(i)})$$

Lors de la transformation, le hamiltonien $H[S]$ est donc transformé en un hamiltonien $H'[S']$ à la constante additive G près, avec la relation :

$$e^{-\beta(G+H'[S'])} = \sum_{[S]} \prod_{\alpha} \delta(S_\alpha^{'} - f(S_\alpha^{i})) e^{-\beta H[S]}$$

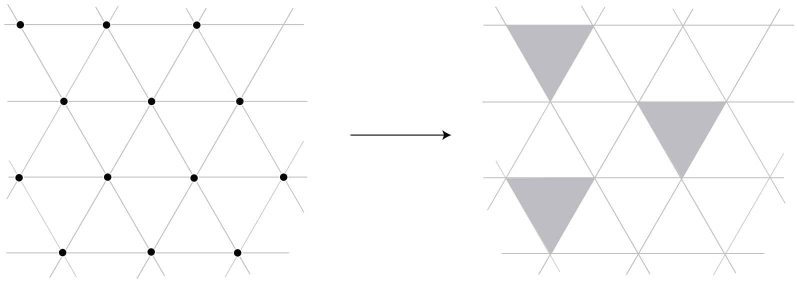

Figure 2 – *Réseau Triangulaire.*

1. Donner le facteur de dilatation b du réseau lors de la transformation par blocs de spins.
2. On écrit le hamiltonien H sous la forme :

$$H = H_0 + V$$

où H_0 contient les interactions entre spins à l'intérieur d'un même bloc et V les interactions entre spins de blocs différents. On écrit alors :

$$e^{-\beta(G+H'[S'])} = \frac{\sum_{[S]} e^{-\beta H_0} \prod \delta(S' - f(S)) \sum_{[S]} e^{-\beta(H_0+V)} \prod \delta(S' - f(S))}{\sum_{[S]} e^{-\beta H_0} \prod \delta(S' - f(S))}$$

On définit la valeur moyenne $\langle A \rangle_0$ d'une quantité A par :

$$\langle A \rangle_0 = \frac{\sum_{[S]} A[S] \prod \delta(S' - f(S)) e^{-\beta H_0}}{\sum_{[S]} e^{-\beta H_0} \prod \delta(S' - f(S))}$$

Montrer que :

$$e^{-\beta(G+H'[S'])} = \left\langle e^{-\beta V} \right\rangle_0 \sum_{[S]} e^{-\beta H_0} \prod \delta(S' - f(S))$$

Dans la suite, on fera l'approximation :

$$\left\langle e^{-\beta V} \right\rangle_0 \approx e^{-\beta \langle V \rangle_0}$$

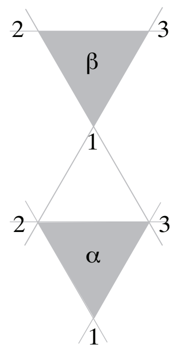

FIGURE 3 – *Interactions entre blocs voisins.*

3. Montrer que $\sum_{[S]} e^{-\beta H_0} \prod \delta(S' - f(S))$ est égal à $Z_0(K)^{N'}$ avec $N' = N/3$ et $Z_0(K) = e^{3K} + 3e^{-K}$.
4. On s'intéresse à l'interaction entre les deux blocs α et β (Figure 3). Montrer que : $\beta V_{\alpha\beta} = -KS^1_\beta(S^2_\alpha + S^3_\alpha)$ et que $\langle S^1_\beta S^2_\alpha \rangle_0 = \langle S^1_\beta \rangle_0 \langle S^2_\alpha \rangle_0$.
5. Montrer que :
$$\langle S^1_\beta \rangle_0 = \frac{1}{Z_0(K)}(e^{3K} + e^{-K})S'_\beta$$
6. En déduire que $\beta\langle V_{\alpha\beta}\rangle_0 = -K' S'_\alpha S'_\beta$ et donner l'expression de K' en fonction de K.
7. Analyser les points fixes de la transformation $K \to K'$ et préciser la valeur K^* du point instable.
8. Calculer dK'/dK pour $K = K^*$. En déduire la valeur de l'exposant critique ν pour la longueur de correlation.
9. Comparer les résultats obtenus par le groupe de renormalisation aux valeurs exactes $K = 0.275$ et $\nu = 1$ du modèle d'Ising sur un réseau triangulaire et à celles obtenues par l'approximation du champ moyen (que l'on rappellera).