Physique Statistique (PHY434)
Maxime Dahan
Année 2016-2017

Petite Classe n° 3
Mardi 25 Avril 2017

Opalescence critique

L'opalescence critique est un phénomène que l'on observe dans un fluide au voisinage de la densité et température critique. Ce phénomène est la conséquence des fluctuations géantes dans la densité du fluide. Quand les fluctuations deviennent comparables à la longueur d'onde de la lumière visible, les rayons transmis par le fluide sont fortement diffusés et le fluide devient trouble.

On considère comme en PC2 le cas d'un gaz sur réseau où des molécules sont placées sur les noeuds d'un réseau cubique de pas a. Les sites sont indicés par $\vec{d_j}$. Nous avons vu que le fluide peut être décrit par un modèle d'Ising en présence d'un champ magnétique. Afin d'obtenir des informations sur les fluctuations de la densité, nous définissons donc l'Hamiltonien H_0 tel que :

$$-\beta H_0 = \sum_{np} R_{np}\sigma_n\sigma_p + \sum_n \lambda_n\sigma_n$$

Dans la suite, on fait l'hypothèse que R_{jl} est symétrique et que $R_{np} = \beta\epsilon/4$ si n, p sont premiers voisins et $R_{np} = 0$ autrement. Au voisinage du point critique, le champ extérieur est nul ($\lambda_n = 0$).

1. Montrer que
$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_j} = \langle\sigma_j\rangle = m_j, \qquad \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial\lambda_j\partial\lambda_l} = \langle\sigma_j\sigma_l\rangle - \langle\sigma_j\rangle\langle\sigma_l\rangle = C_{jl}.$$
2. Ecrire l'énergie libre du système dans l'approximation du champ moyen.
3. Ecrire un systéme d'équations auto-cohérentes en imposant la stationnarité de l'énergie libre par rapport à m_j. Différencier le système d'équations par rapport à λ_l et démontrer la relation :
$$\frac{1}{1-m_j^2}C_{jl} = \sum_p R_{jp}C_{pl} + \delta_{jl}.$$
4. On considère la solution uniforme $m_j = m$. Soit
$$C_{\vec{k}} = \sum_j C_{jl}\exp\left(i\vec{k}\cdot(\vec{d_j} - \vec{d_l})\right)$$
et
$$C_{jl} = \frac{1}{N}\sum_k C_{\vec{k}}\exp\left(-i\vec{k}\cdot(\vec{d_j} - \vec{d_l})\right).$$
Réécrire l'équation de la question précédente dans l'espace de Fourier et calculer $C_{\vec{k}}$.
5. On considère le système dans la phase liquide et au voisinage du point critique. On sait que $\langle\sigma_j\rangle = m \approx c\sqrt{1 - T/T_c}$ avec $c > 1$ quand $T \to T_c$. Montrer que pour des petits vecteurs d'onde $\vec{k}$ on trouve $C_{\vec{k}} \propto 1/(k^2 + \xi^{-2})$. Donner l'expression de ξ, appelée la longueur de cohérence, en fonction de $T - T_c$.
6. Calculer la transformée de Fourier de $\exp(-r/\xi)/r$ et discuter le résultat dans le cadre de l'opalescence critique.
7. On généralise maintenant le problème à un réseau en dimension arbitraire D. Ginzburg a proposé comme critère de validité de la théorie du champ moyen que pour deux sites à distance $|\vec{d_j} - \vec{d_i}| = \xi$, on ait $\langle\sigma_j\sigma_l\rangle - \langle\sigma_j\rangle\langle\sigma_l\rangle < \langle\sigma_j\rangle^2$. Discuter qualitativement le sens du critère de Ginzburg et indiquer pour quelle dimension D la théorie du champ moyen est valable dans la limite $T \to T_c$.