Physique des Objets Biologiques (PHY552)
Maxime Dahan
Année 2016-2017

Petite Classe n° 2
Vendredi 23 Septembre 2016

Diffusion brownienne

1 Particule dans un puits de potentiel

On considère le mouvement unidimensionnel d'une particule de coefficient de diffusion D dans un puits de potentiel $U(x)$. On note $P(x,t)$ la densité probabilité de trouver la particule en x à t.

1. Ecrire l'équation de conservation de la probabilité P reliant son évolution temporelle au courant $J(x,t)$. Ecrire ce dernier si on considère que la particule évolue sous l'effet de la force $F = -dU/dx$ et de l'agitation thermique.
2. Quelle est la distribution de probabilité $P_{\text{eq}}(x)$ à l'équilibre ? Que vaut le courant $J_{\text{eq}}(x)$ à l'équilibre.

   On considère dorénavant que le potentiel est harmonique $U(x) = Kx^2/2$.
3. On lâche la particule en $x = x_0$ à $t = t_0$ et on note $P_0(x,t) = P(x,t|x_0,t_0)$ la solution des équations correspondant à cette condition initiale. La position moyenne de la particule est alors $\langle x\rangle_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(x,t)x dx$ pour $t > 0$.
   Calculer $d\langle x\rangle_0(t)/dt$ puis $\langle x\rangle_0(t)$. Montrez qu'intervient un temps caractéristique $\tau_p = k_BT/DK$, qui est le temps que met la particule pour diffuser sur une longueur l_p que vous interpréterez.
4. Calculer $\langle x^2\rangle_0(t)$. Interprétez les limites $K \to 0$ et $t \to \infty$.
5. Calculer, à l'équilibre thermodynamique, la fonction de corrélation temporelle

   $$C(\tau) = \langle x(t_0)x(t_0+\tau)\rangle_{\text{eq}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x_0.x) P_{\text{eq}}(x_0) P(x, t_0+\tau|x_0,t_0)$$

   Interprétez le résultat obtenu.
6. *Facultatif :* On peut calculer l'expression complète du propagateur $P(x, t_0+t|x_0,t_0)$. Pour cela, cherche une solution de forme gaussienne :

   $$P(x, t_0+t|x_0,t_0) = [2\pi B(t)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x-A(t))^2}{2B(t)}\right]$$

   En utilisant l'équation de Langevin, calculer A et B et montrer que l'on a :

   $$P(x, t_0+t|x_0,t_0) = \left[\frac{2\pi k_BT}{k}(1-\exp(-2t/\tau_p))\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{k[x - x_0\exp(-t/\tau_p)]^2}{2k_BT[1-\exp(-2t/\tau_p)]}\right]$$

   Interprétez les limites $t \ll \tau_p$ et $t \gg \tau_p$.

2 Calibration d'un piège optique

Dans un piège optique, c'est la focalisation d'un faisceau laser qui génère $U(x)$. On peut de plus mesurer le déplacement en utilisant le piège lui-même, en réalisant celui-ci à partir de deux faisceaux légèrement décalés (~ 200 nm). On mesure alors la différence de phase entre les deux faisceaux après le piège (la bille modifie le chemin optique). Cette différence donne lieu à un signal expérimental $\Delta V(t)$ dont on s'attend à ce qu'il soit proportionnel à $x(t)$ pour de petits déplacements.

On a donc $\Delta V(t) = \alpha x(t)$ avec α un coefficient que l'on veut estimer. Pour cela, on peut laisser la bille dans le piège pendant un temps long (équilibre thermodynamique), et mesurer $\Delta V(t)$ qui va fluctuer puisque $x(t)$ fluctue. Il est souvent commode de tracer la quantité suivante :

$$S(f) = \int_0^\infty d\tau \cos(2\pi f \tau) \langle \Delta V(t_0) \Delta V(t_0 + \tau) \rangle_{t_0}$$

en fonction de la fréquence f (voir figure 1 à gauche). Si l'on est à l'équilibre thermodynamique, et que la série de données est assez grande, le moyennage sur t_0 devrait être équivalent à la moyenne thermodynamique effectuée à la question 4.

7. Montrer qu'on attend alors une forme Lorentzienne :

$$S(f) = S_0 \frac{f_c^2}{f_c^2 + f^2}$$

où f_c est une fréquence de coupure et S_0 que vous déterminerez.

8. Vérifier que les expériences de la figure 1 confirment la prédiction précédente. Pouvez vous déterminer les paramètres K et α caractérisant le piège ?

9. Les données sur la courbe de gauche correspondent à une bille de 500 nm dans de l'eau à température ambiante. Déterminez la raideur K du piège. Sur quelle longueur typique l_p gigote la bille piégée sous l'effet de l'agitation thermique ?

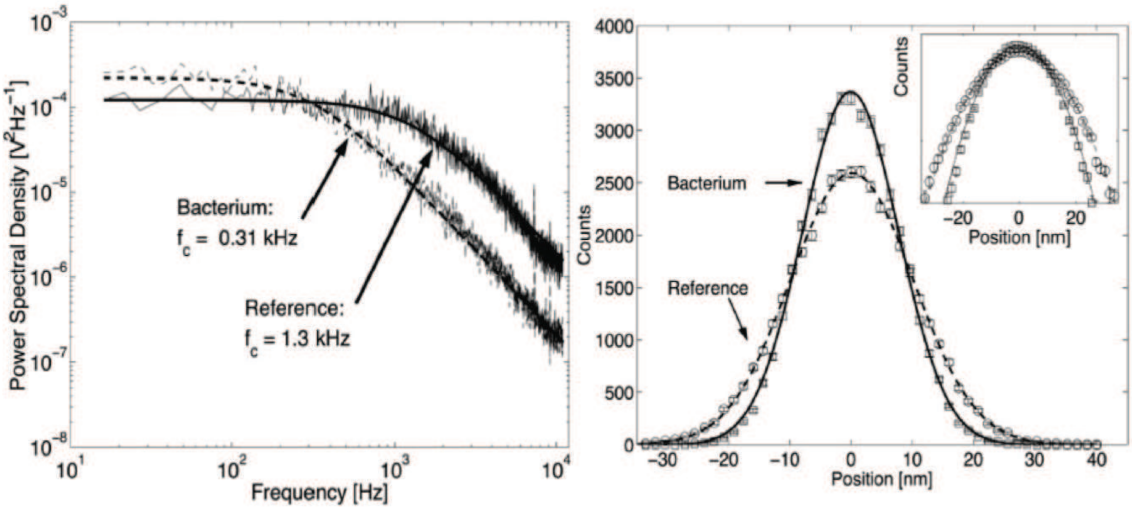

FIGURE 1 – *Specture de puissance $S(f)$ et histogrammes des déplacements de la bille dans le piège en l'absence (référence) et en présence (bactérium) du complexe protéique. Extrait de Oddershede et al. Biophys. Journal 83, 3152 (2002). "The motion of a Single Molecule, the λ-Receptor, in the Bacterial Outer Membrane".*